Opción A

1A.- Consideremos la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$, donde ln denota el logaritmo neperiano. Resuelva justificadamente los siguientes apartados:

a. Presente el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles extremos relativos de la función f(x). 1'25 ptos

b. Calcule el valor de la integral: $\int_1^e f(x)dx$ 1'25 ptos

Solución

(a)

Presente el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles extremos relativos de la función f(x).

Sabemos que la función ln existe sólo para x >0, luego **el dominio de f(x) (0, +∞).**

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f '(x).

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2};\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x\cdot\ln(x)}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x\cdot\ln(x)}{x^4}.$$

Si f '(x) = 0 → x - 2x·ln(x) = 0 = x·(1 – 2ln(x))= 0, de donde x = 0 (No está en el dominio) y 1 – 2Ln(x) = 0, de donde ln(x) = 1/2 y por tanto *x = e^{1/2} = √(e) ≅ 1'645, que será el posible extremo relativo*.

Como f '(1) = (1 – 2·ln(1))/(+) = 1/(+) > 0, **luego f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (0, 1/2).**

Como f '(2) = (2 – 2·ln(2))/(+) ≅ -0'773/(+) < 0, **luego f(x) es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (1/2, +∞).**

Por definición en x = √(e) hay un máximo relativo que vale f(√(e)) = (1/2)/e² = 1/(2e²) ≅ 0'72.

(b)

Calcule el valor de la integral: $\int_1^e f(x)dx$

Un primitiva de f(x) es:

$$I = \int\frac{\ln(x)}{x^2}dx = \left\{\begin{array}{l} u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow v = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x}\end{array}\right\} = \frac{-1}{x}\cdot\ln(x) - \int\frac{-1}{x}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{-1}{x}\cdot\ln(x) + \int\frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{-1}{x}\cdot\ln(x) - \frac{1}{x} + K = \frac{-1}{x}\cdot(\ln(x) + 1) + K$$

Luego la integral pedida es: $\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \frac{\ln(x)dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x}\cdot(\ln(x) + 1)\right]_1^e =$

= ((-1/e)·(ln(e) + 1) - (-1/1)·(ln(1) + 1) **= -2/e + 1.**

2A.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{pmatrix}$.

a. Halle los valores del parámetro k para los que la matriz A tiene inversa. 1'5 ptos

b. Tomando el valor k = -1 en la matriz A, calcule la matriz X que verifica que: $A\cdot X = 24\cdot I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3. 1 pto

Solución

(a)

Halle los valores del parámetro k para los que la matriz A tiene inversa.

$$\text{De } A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{pmatrix} \text{ tenemos } \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{vmatrix}_{F_3-F_1} = \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 1 & k-4 \end{vmatrix} \begin{array}{l}\text{Adjuntos}\\ \text{primera}\\ \text{columna}\end{array} =$$

= k·((k-1)·(k-4) - (k-1)) - 0 + 0 = k·(k-1)·(k-4-1) = k·(k-1)·(k-5).

Si |A| = 0 → k·(k-1)·(k-5) = 0, de donde k = 0, k = 1 y k = 5.

Si $k \neq 0$, $k \neq 1$ y $k \neq 5$, $|A| = 0$ y existe la matriz inversa $A^{-1} = \dfrac{Adj(A)^t}{|A|}$.

(b)
Tomando el valor $k = -1$ en la matriz A, calcule la matriz X que verifica que: $A \cdot X = 24 \cdot I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3.

Hemos visto en el apartado (a) que para $k = -1$, existe la matriz inversa A^{-1}.

Multiplicando por la izquierda la expresión $A \cdot X = 24 \cdot I_3$ por $A^{-1} \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot 24 \cdot I_3 \rightarrow I \cdot X = 24 \cdot A^{-1}$, **por tanto la matriz pedida es $X = 24 \cdot A^{-1}$.**

Tenemos $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$; $|A| = (-1) \cdot (-2) \cdot (-6) = -12$, $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$,

$Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \dfrac{Adj(A)^t}{|A|} = \dfrac{1}{-12} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Luego $X = 24 \cdot A^{-1} =$ $(24) \cdot \left(\dfrac{1}{-12}\right) \cdot \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -20 & -2 & -4 \\ -4 & -10 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

3A.- Dadas las rectas siguientes $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y + 5 = 0 \end{cases}$.

a. Estudie la posición relativa de r y s. 1'25 ptos

b. Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta r, y que contiene el punto A(11,-2,5). 1 pto

Solución

(a)

Estudie la posición relativa de r y s.

De $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$, tomando $y = m \in R$, $x = 7 - 2m$ y entrando en la 1ª, $(7 - 2m) + (m) - z = 4$, tenemos $z = 3 - m$. En vectorial $r \equiv (x, y, z) = (7 - 2m, m, 3 - m)$. Un punto de la recta r es P(7, 0, 3) y un vector director es $\mathbf{u} = (-2, 1, -1)$.

La recta s en vectorial es $s \equiv (x, y, z) = (2, -5, n)$ con $n \in R$. Un punto de la recta s es Q(2, -5, 0) y un vector director es $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$.

Como los vectores **u** y **v** no son paralelos las restas r y s se cruzan o se cortan.
Si det(**PQ**, **u**, **v**) = 0 se cortan y si det(**PQ**, **u**, **v**) $\neq$ 0 se cruzan, con **PQ** = (-5, -5, -3).

Como det(PQ, u, v) $= \begin{vmatrix} -5 & -5 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= 0 - 0 + 1 \cdot (-5-10)$ **$= -15 \neq 0$, las restas r y s se cruzan.**

(b)
Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta r, y que contiene el punto A(11,-2,5). 1 pto

Como el plano es perpendicular a la recta r el vector normal al plano **n** es el director de la recta, es decir **n** = **u** = (-2, 1, -1).

El plano pedido es $\pi \equiv$ AX•u = (x-11, y+2, z-5)•(-2, 1, -1) **= 0 = -2x + 22 + y + 2 - z + 5 =**
= -2x + y - z + 29 = 0.

4A.- El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.

a. ¿Qué porcentaje de esas impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento? 1'25 ptos

b. ¿Qué porcentaje de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso? 1'25 pto

Solución
(a)
¿Qué porcentaje de esas impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento?

X sigue una normal $N(\mu, \sigma) = N(1500, 200)$

Nos piden $p(X \leq 1000) =$ {tipificando} = $p\left(Z \leq \frac{1000 - 1500}{200}\right) = p(Z \leq -2'5) =$ {simetría} $= p(Z > 2'5) =$

= {suceso contrario} = $1 - p(Z \leq 2'5) = = 1 – 0'9938$ **= 0'0062 = 0'62%**.
(b)
¿Qué porcentaje de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso?

Nos piden $p(1000 < X < 2000) =$ {tipificando} = $p\left(\frac{1000 - 1500}{200} \leq Z \leq \frac{2000 - 1500}{200}\right) = p(-2'5 < Z < 2'5) =$

$= p(Z < 2'5) - p(Z < -2'5) =$ {simetría} $= p(Z < 2'5) - p(Z > 2'5) =$ {suceso contrario} =
$= p(Z < 2'5) - (1 - p(Z \leq 2'5)) = p(Z < 2'5) - 1$ **$= 2\cdot 0'9938 – 1 = 0'9876 = 98'76\%$**.

Opción B

1B.- Sean las funciones $f(x) = 2x^4 + ax^2 + b$ y $g(x) = -2x^3 + c$.
a. Calcule los valores *a*, *b* y *c* de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ cumplan las dos condiciones siguientes:
- Se corten en el punto P(1, 1).
- En dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes.

Dar las expresiones de las funciones resultantes. 1'5 ptos

b. Suponiendo $a = b = 1$ en $f(x)$, halle las asíntotas de la función $h(x) = \frac{f(x)}{x^3 - 1}$. 1 pto

Solución
a. Calcule los valores *a*, *b* y *c* de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ cumplan las dos condiciones siguientes:
- Se corten en el punto P(1, 1).
- En dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes.

Dar las expresiones de las funciones resultantes.

De coinciden en P(1, 1), tenemos $f(1) = g(1) = 1$, es decir $2 + a + b = -2 + c = 1$, **luego $c = 3$** y $a + b = -1$.

De en dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes, tenemos $f'(1) = g'(1)$.
Tenemos $f'(x) = 8x^3 + 2ax$, $g'(x) = -6x^2$, luego $8 + 2a = -6$, $2a = -14$, **por tanto $a = -7$ y $b = 6$.**

Las funciones pedidas son $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 6$ y $g(x) = -2x^3 + 3$.
(b)
Suponiendo $a = b = 1$ en $f(x)$, halle las asíntotas de la función $h(x) = \frac{f(x)}{x^3 - 1}$.

Tenemos $h(x) = \frac{f(x)}{x^3 - 1} = \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1}$
Sabemos que la recta $x = a$ es una asíntota vertical (A.V.) de la función $f(x)$ si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Como $\lim_{x\to 1+} \frac{f(x)}{x^3 - 1} = \lim_{x\to 1+} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$, **la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de f(x).**

Posición relativa, $\lim_{x\to 1-} \frac{f(x)}{x^3 - 1} = \lim_{x\to 1-} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$

En un cociente de funciones polinómicas con el numerador un grado más que el denominador, la función $f(x)$ tiene una asíntota oblicua (A.O.) de la forma $y = mx + n$, con $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) – mx]$.

En este caso las A.O. es la misma en $\pm\infty$.
En este caso la A.O. se puede calcular realizando la división entera y es el cociente de la división.

$$\begin{array}{l|l} 2x^4 + x^2 + 1 & x^3 - 1 \\ \hline -2x^4 \quad\; + 2 & 2x \quad \text{A.O.} \\ \hline x^2 + 3 & \end{array}$$

Vamos a comprobar que la A.O es $y = mx + n = 2x$.

$$m = m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x\cdot(x^3 - 1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^4 - x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4}{x^4} = 2.$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} - 2x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1 - 2x^4 + 2x}{x^3 - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Luego la A.O es y = 2x.

Como Hay A.O. en $\pm\infty$, **no hay asíntotas horizontales en $\pm\infty$.**

Posición relativa

Como $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} - 2x\right) = 0^+$, f(x) está por encima de y = 2x en $+\infty$

Como $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} - 2x\right) = 0^-$, f(x) está por debajo de y = 2x en $-\infty$

2B.- Una pequeña bombonería tiene en su almacén 24 kg de chocolate y 60 litros de leche, con los que elabora tres productos distintos: cajas de bombones, tabletas de chocolate y paquetes de chocolate en polvo. Del resto de los ingredientes se tienen reservas suficientes.

Se sabe que las cajas de bombones requieren 2 kg de chocolate y 6 litros de leche, las tabletas de chocolate requieren 4 kg de chocolate y 4 litros de leche, y cada paquete de chocolate en polvo requiere 1 kg de chocolate y 4 litros de leche. Se quiere fabricar un total de 12 unidades y con ello se consume todo el chocolate y toda la leche almacenados. ¿Cuántas unidades deben fabricarse de cada tipo de producto? 2'5 ptos

Solución

(a)

Plantea un sistema de ecuaciones que interprete el enunciado.

x = Número de cajas de bombones.
y = Número de tabletas de chocolate.
z = Número de paquetes de chocolate en polvo.

De "Se quiere fabricar un total de 12 unidades" $\to$ $x + y + z = 12$.

De "24 kg de chocolate en total, con 2 kg para bombones, 4 kg de tabletas de chocolate y 1 kg de chocolate en polvo" $\to$ $2x + 4y + z = 24$.

De "60 litros de leche en total, con 6 litros para bombones, 4 litros para tabletas de chocolate y 4 litros para chocolate en polvo" $\to$ $6x + 4y + 4z = 60$.

Nuestro sistema es: $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + 4y + z = 24 \\ 6x + 4y + 4z = 60 \end{cases}$

Resolvemos el sistema por con las transformaciones elementales.

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + 4y + z = 24 \; (E_2\text{-}2E_1) \\ 6x + 4y + 4z = 60 \; (E_3\text{-}6E_1) \end{cases} \approx \begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2y + -z = 0 \\ -2y - 2z = -12 \; (E_3+E_2) \end{cases} \approx \begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2y + -z = 0 \\ -3z = -12 \end{cases}$$, de la tercera ecuación z = 4,

de la segunda y = 2 y de la primera x + 2 + 4 = 12, de donde x = 6, es **decir la solución de nuestro sistema es (x, y, z) = (6, 2, 4), por tanto tienen que fabricarse 6 cajas de bombones, 2 tabletas de chocolate y 4 paquetes de chocolate en polvo.**

3B.- Consideremos la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 4z = -1 \end{cases}$, y el plano $\pi_1 \equiv x - y + 3z = 12$

a. Calcule la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π_1. 1'25 ptos
b. Sabiendo que la recta r corta el plano π_1, averigüe el punto de intersección. 1'25 ptos
Solución
(a)
Calcule la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π_1.

Para el plano necesitamos un punto A (uno de la recta) y dos vectores independientes uno el de la recta u y otro el normal al plano π_1, que es **n** = (1, -1, 3).

Ponemos la recta en vectorial (parámetro m), sustituimos en el plano, despejamos m y ya tenemos el punto de corte.

De $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 4z = -1 \end{cases}$, tomamos $x = m \in R$, con lo cual $y = -5 + 2m$, y de $3m - 4z = 1$, $z = 1/4 + (3m)/4$, por tanto la forma vectorial es: $r \equiv (x, y, z) = (m, -5 + 2m, 1/4 + (3m)/4)$ con $m \in R$. Un punto de la recta es A(0, -5, 1/4) y un vector director (1, 2, 3/4); otro paralelo es **u** = (4, 8, 3).

El plano pedido es $\pi_2 \equiv \det(AX, u, n) = 0 =$ $\begin{vmatrix} x & y+5 & z-1/4 \\ 4 & 8 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila =

$= x(24+3) - (y+5)(12-3) + (z-1/4)(-4-8)$ $\mathbf{= 27x - 9y - 45 - 12z + 3 = 0 = 27x - 9y - 12z - 42 = 0 =}$
$\mathbf{= 9x - 3y - 4z - 14 = 0}$
(b)
Sabiendo que la recta r corta el plano π_1, averigüe el punto de intersección.

Ponemos la recta en vectorial (parámetro m), sustituimos en el plano, despejamos m y ya tenemos el punto de corte.

$r \equiv (x, y, z) = (m, -5 + 2m, 1/4 + (3m)/4)$ con $m \in R$.

$(m) - (-5+2m) + 3(1/4+(3m)/4) = 12 \rightarrow m + 5 - 2m + 3/4 + (9m)/4 = 12 \rightarrow (5m)/4 = 25/4$, de donde tenemos m = 5, **y el punto de corte de la recta y el plano es:**
(x, y, z,) = ((5), -5 + 2(5), 1/4 + (3(5))/4) **= (5, 5, 4).**

4B.- Se sabe que el 8% de los análisis de comprobación del níquel en una aleación de acero son erróneos. Se realizan 10 análisis.
a. Se afirma que la probabilidad de que 3 o más análisis sean erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto. 1'25 ptos
b. Se afirma que la probabilidad de obtener exactamente 3 análisis erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto. 0'75 ptos
c. Si se realizan 100 análisis, justifique si el número esperado de análisis correctos es igual a 8. 0'5 ptos
Solución
(a)
Se afirma que la probabilidad de que 3 o más análisis sean erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto.

Recordamos que si realizamos **n** veces (10) un experimento en el que podemos obtener éxito, F, con probabilidad **p** (p(F) = 8% = 0'08) y fracaso, F^C, con probabilidad **q** (q = 1 – p = 1 – 0'08 = 0'92), diremos que estamos ante una distribución binomial de parámetros **n** y **p**, y lo representaremos por **B(10; 0'08)**.
Es decir nuestra variable **X sigue una binomial B(n;p)** = **B(10; 0'08)**.
En este caso la **probabilidad de obtener k éxitos**, que **es su función de probabilidad**, viene dada por:

$$\mathbf{p(X = k) = (10\text{ sobre }k)\cdot 0'08^{k}\cdot 0'92^{(10-k)} = \binom{10}{k}\cdot 0'08^{k}\cdot 0'92^{(10-k)}.}$$

****** (n sobre k) = $\binom{n}{k}$ = (n!)/(k!.(n - k)!) con n! el factorial de "n". En la calculadora " n tecla **nCr** k "

Me piden $p(X \geq 3)$ = {suceso contrario } = 1 – p(X < 3) = 1 – (p(X = 0 + p(X = 1) + p(X = 2)) =

$= 1 - \left(\binom{10}{0} \cdot 0'08^{0} \cdot 0'92^{(10)} + \binom{10}{1} \cdot 0'08^{1} \cdot 0'92^{(9)} + \binom{10}{2} \cdot 0'08^{2} \cdot 0'92^{(8)} \right) =$

= 1 – (0’434388454 + 0’37772909 + 0’147807035) **= 0’0398121 = 3’98%, y vemos no es menor que el 3%.**

(b)

Se afirma que la probabilidad de obtener exactamente 3 análisis erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto. 0’75 ptos

Me piden p(X = 3) = $\binom{10}{3} \cdot 0'08^{3} \cdot 0'92^{(7)}$ **= 0’03427409 = 3’427%, y vemos no es menor que el 3%.**

(c)

Si se realizan 100 análisis, justifique si el número esperado de análisis correctos es igual a 8. 0’5 ptos

Me piden si la media de la binomial es 8.
La media de B(n, p) es μ = n·p = 100·0’08 = 8, lo cual es cierto.